児童・生徒が生き生きと学ぶ算数・数学的活動の追究

新潟県 コンパスの会〔新潟算数・数学教育研究会〕
代表　小畑　裕

当研究会の目的は、「主体的・対話的で深い学び」を実践し、児童・生徒の学びの力を育もうとするものである。
次の３点をとおして、目的に迫る。

① 個に応じた指導
② 基礎的・基本的な学力の定着
③ 思考力・判断力・表現力を培う算数・数学的活動

小学校・中学校の教員で会を構成し、小・中学校９か年を見通し連携した教科指導を研究できるところが、この会の長所でもある。
本年度も会員一人一が実践を行い、会員個々の資質能力を高めた。
その中の２つの実践を紹介する。

１．主体的で対話的な学びを促す授業にするために

(1)　原問題（良質な課題）を提示する

連続する３つの奇数の和は、３の倍数になる。そのわけを説明しなさい。

平成22年４月の「全国学力・学習状況調査」の数学Ｂの$\boxed{2}$の問題である。

当研究会ではこのような問題からスタートし、授業を発展的に構想していくことが、会の目的に迫れると仮説を立てた。

この最初の問題を**原問題**と呼ぶ。問題の前半「連続する３つの奇数の和は、３の倍数になる。」は**命題**である。

数学は命題をつくり、証明する学問である。上の命題には、【仮定】連続する３つの奇数の和は、【結論】３の倍数になる。と分けることができる。

実践授業①では、【仮定】の３つと奇数を取り上げ、条件変更し、３つ→４つ，５つ，・・・，奇数→偶数と変更することを促す。そうすることにより、（例えば）「連続する４つの奇数の和は、○の倍数になる。」と予想し、それを証明していく、中学校２年生「文字式の利用」に適した題材となる。

ちなみに「連続する３つの偶数の和は、何の倍数？」は平成24年４月の「全国学力・学習状況調査」数学Ｂの$\boxed{2}$の問題である。原問題を条件変更し、発展的な授業を構想する。文部科学省は、このような授業改善を期待しているのである。

(2)　命題（「連続する３つの‥」）の構造分析をする

「連続する3つの奇数の和
p_1　p_2
⇒は（ﾅﾗﾊﾞ）○の倍数になる」
q

命題は、通常「p（仮定）⇒ﾅﾗﾊﾞ q（結論）」の形をしている。しかし、細分すれば、

「$p_1 \wedge$（かつ）$p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \Rightarrow q$」の形をしている。上の例でいえば、$p_1$に「3つの」、$p_2$に「偶数の」が当てはまる。$p_3$に「和」も該当すると言ってよい。

つまり、命題でいう仮定や条件は、p_1, p_2, p_3, ･･･, の複合体であり、それらは互いに関わりをもたない。全体の個数は、$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots$（個）あり、直積となっている。これが、**命題の構造**である。

提案授業①では、3つ、奇数、を条件変更し、何の倍数になるか予想する。予想の後に、文字式で証明してみる。実際の授業では、生徒の予想は正答とは大きく異なり、それに気付いた瞬間、驚きの声が上がった。

(3)　2次元表を作成する

命題における条件に当たる部分は、直積構造であり、p_1とp_2のみに絞れば、個数は$p_1 \times p_2$（個）ある。このことから、横軸にp_1、縦軸にp_2の2次元表がつくれる。

連続する数 ＼ 奇数・偶数	3	4	5	6	7	…
奇数の和	3	8	(？)	(？)	(？)	…
偶数の和	6	(？)	(？)	(？)	(？)	…

授業を構成するときは、この2次元表を活用したい。すると、「今、私はどこをしているのか？」「ああ、僕は今、奇数の5つをしているのだな。」と確認しながら、表を埋めていくことができる。このように生徒自ら条件変更できると授業が楽しくなる。表が埋まったとき、規則性を自分の言葉で表現できることも、育てたい資質・能力である。生徒一人一人がこのような考えができることを本研究はねらっている。

実践授業②もこの (1) ～ (3) を通して、主体的で対話的な学びを求める授業となった。

2．実践授業ー①

原問題をもとに条件変更し、生徒自らが問題をつくり、2次元表にまとめて整理していく授業

【学年・単元名】
中学校2年・式の計算

(1)　本時のねらい

「連続する3つの奇数の和は、3の倍数である」を原問題とし、条件を変えて新たな問題を作ることを通して、偶数・奇数の和は一定の規則性があることを見い出すことができる。

(2)　本時の構想

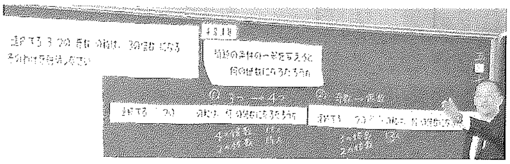
①　問題づくりの場面

前時では、「連続する3つの奇数の和は、3の倍数である」ことの説明の仕方を学習した。本時では、これを原問題とする。

この文の前半には「連続する3つ」と「奇数の和」という記述がある。この「3つ」と「奇数」を変えて新たな文をつくる。

例えば、「3つ」を「4つ」と変えて「連続する4つの奇数の和は、何の倍数になるだろうか。」とすれば、新たな問題をつくったことになる。「3つ」のときには「3の倍数」だったので、「4つ」のときは「4の倍数」と予想する生徒も出てくると思われる。実際に数字を入れたり、文字式で計

算すると予想と異なることが分かる。この学習を通して、生徒はこの題材のもつ不思議さや意外性に気付き興味を抱くであろう。



このように、「３つ」を「４つ」「５つ」・・・としたり、「奇数」を「偶数」に変えたりすることで、新たな問題ができたことになる。

②　つくった問題の分類・整理の場面

原問題の前半は、「３つ」「４つ」・・・・という数字の部分、「奇数」「偶数」という属性の部分のように変更できる部分が２箇所ある。そして、分類・整理をするのに前ページのような２次元表を提示する。

この表を提示することで、自分の作った問題がこの表のどこにあるのか明確になる。自力解決ではこの表を埋めることで、「ここは何の倍数になるだろうか。」「どのような規則性があるだろうか。」と主体的に取り組むことができるようになる。

③　つくった問題の解決（主体的な学び）

「連続する△つの□数の和は、○の倍数になる。」・・・・この文は、命題の形になっている。生徒は△や□を変えて、○を予想する。この予想が正しいことを明らかにするためには、前時の文字式の計算が必要になる。$2n+1$，$2n+3$，・・・・と奇数を表したり、$2n$，$2n+2$，・・・・と偶数を表したりできれば、容易に生徒自ら文字式の計算を行うことができるようになる。

最後は分配法則を用いて式を変形し、○（・・・・・・）の形になれば、○の倍数であることが分かり、予想が正しいかどうか判断することができる。

④　関わり合う（対話的な学び）

「③つくった問題の解決」では最初自力解決をする。次に小集団をつくり、グループ学習をする。自分や仲間が解決した問題を紹介し合いながら、この表を埋めていく。この関わり合いを通して、自分の意見を述べたり仲間の意見を聞いたりする。自分が考えも及ばなかった仲間の意見に驚いたり、その意見をもとにさらに多様な思考が生まれたりする。

⑤　まとめと振り返り

表を埋めていくと、一見規則性がないように見える数字の列だが、表全体を見回すと一定の規則性が見えてくる。生徒は改めて、この題材のおもしろさや不思議さを感ずることになる。

最後に、本時で学んだことを生徒と一緒に振り返り、本題材の意味やよさを生徒が自分の言葉で書く時間をつくる。

(3)　授業の実際

①　原問題の条件変更で生まれた、倍数の予想について

ア）３つを変え、「４つの奇数の和は、何の倍数？」を問うたら、

４の倍数が　11人
２の倍数が　15人
分からないが　６人　であった。

イ）奇数を変え、「３つの偶数の和は、何の倍数？」を問うたら、

３の倍数が　13人
２の倍数が　９人
分からないが　10人　であった。

この予想の時点で正解はいなかった。正解は、①は８の倍数、②は６の倍数である。

自力解決やグループ学習で正解を確認した瞬間に、生徒は「あっ」と驚いたり、「なるほど」と関心したりしていた。

② 2次元表にし、規則性を見付けることについて

4 班

	連続する 3つ	4つ	5つ	6つ	7つ	…
奇数	3	8	5	12	7	…
偶数	6	4	10	6	14	…

1つとばしになっている。

1 班

	連続する 3つ	4つ	5つ	6つ	7つ	…
奇数	3	8	5	12	7	…
偶数	6	4	10	6	14	…

奇数と奇数 → そのままの数
奇数と偶数 → その数が2倍された数
偶数と奇数 → その数が2倍された数
偶数と偶数 → そのままの数

表の横を見ただけでは、上段は、3，8，5，12，7，・・・と、不規則な並びにしか見えない。しかし2次元表にし、表の空欄を埋めていくことで統一した規則性が見えてくる。

このように、①**条件変更をさせること**と、②**2次元表で整理すること**は、生徒の「主体的・対話的な学び」を大いに向上させる。

3．実践授業－②
原問題と条件変更した問題を2次元表にまとめ、仮商から正しい商を見積もっていく授業

【学年・単元名】

小学校4年・2けたのわり算

(1) 本時のねらい

仮商を修正する場合の除法について、2次元表をもとに、商の見当を付けて仮商を増やしたり減らしたりすれば、およその数を仮商と見て商を立て、早く計算できることを理解する。

(2) 本時の構想

前時までに児童は、2桁÷2桁，3桁÷2桁の計算を学んだ。見当を付けて仮商を決定し、計算が始まる。見当は、除数と被除数の1の位を0と見て計算することである。

96÷33においては、「商が大きすぎるときには、1減らせばよい。」

68÷16においては、「1減らしても答えにたどり着かない場合には、さらに1減らせばよい。」

このように、仮商→修正を学んだ。

本時は、仮商→修正では、修正の回数が多くなってしまうような問題を扱い、なるべく少ない回数で修正する必要感をもたせる。そのために、以下のような手立て行う。なお、本時における「早く計算する」とは、「修正回数を減らすこと」とする。

① 見当を付けて計算すると、修正回数が4回になる問題を提示する。

本時の導入は、92÷18で行う。既習通り行うと、見当を付けて90÷10となり、商が9になると予想される。これは、商が5になるまで、修正回数が4回である。児童は「こんなに修正をするなんて、大変だ。」と困難さを訴えるだろう。このような課題意識を取り上げ、修正する数をもっと減らすことができないだろうか、という気持ちを取り上げ学習課題とする。

② 修正する回数を減らすためにはどうす

ればよいのか予想させ、解決への方法を考える。

どうやって仮商を立てるとよいか、と問うと、２通りの考えが予想される。

一つは、９２÷１８を９０÷２０と見ることで、仮商が４になることが予想され、答えの５に近いことが分かる。

もう一つは、仮商を９と立てた後に、１ずつ減らさずに、２ずつ減らせばいいというものである。この考えは、引き算が９２－１６２になり、引く数が引かれる数よりもとても大きくなることに気付く児童から生まれてくると考えられる。

１８×７＝１２６で、被除数９２に早く近づく。どちらの方法でも解決ができることを確認してから、自力解決に入っていく。(実際の授業では、この考えは出なかった)

③　ここまでのまとめの意味を拡張し、一般化する。

９０÷２０と見た児童からは、修正の回数が１回で済んだことが発言される。児童は、「およその数にすれば、修正の回数を減らすことができる。」とまとめることができる。

次に、様々な（２位数）÷（２位数）を全員で解くという活動を用意する。１の位を切り捨てる場合と、およその数として見る場合との修正回数を比較することを通して、およその数で見て計算した方が修正回数が少なくなることが多いことを経験的にとらえさせていきたい。ここで、「四捨五入」を教えることとする。

(3)　授業の実際

授業では、**原問題**にあたる部分を［**主問題１**］、条件変更した問題を［**主問題２**］として、児童に提示した。

［**主問題１**］　９２÷１８

今までは、９２÷１８を９０÷１０と見て、仮商を９と立てた。そして、１８×９＝１６２として９２－１６２ができない場合には、仮商を１つ減らすという修正をくりかえすという方法をとってきた。

この場合は、商５が正答のため４回の修正を必要とする。児童からは、「大変だ」「面倒」「もっといい方法はないのだろうか」という疑問が出た。

そこで、学習課題を**どうしたら早くかんたんに計算できるかな**と設定した。

１８をおよその数２０と見て９０÷２０で仮商を立てれば、修正の回数が減るのではないかという考えが生まれた。そうすると仮商は４である。修正回数が１回で済むので便利であるとまとまった。

次に「他の数でも成り立つのだろうか」と投げかけた。子どもたちは「できるのではないか？」と予想した。そこで、

９２÷１８に近い数で計算する問題を［**主問題２**］とし、実際に計算していった。

［**主問題２**］　９□÷１△

(□＝0,1,2,3,4　△＝9,8,7,6)

これにより、１８や１７,１９などの数は、２０と見て計算すると修正回数が少なくて済むということを、実感した。

およその数にする「**四捨五入**」が、修正回数が少なくて済むことを、体得した。

(4)　授業の評価

［**主問題１**］において、１８を２０と見ると修正回数が少ないと分かったことが本時の学びであった。これは、児童全員が理解した。

［**主問題２**］において、様々な数で計算することを通して、修正回数が少ない方法を学ぶことができた。

評価問題では、８２÷１９を出題したところ、児童は８０÷２０として計算した。

(5)　原問題と条件変更した問題を取り入れて

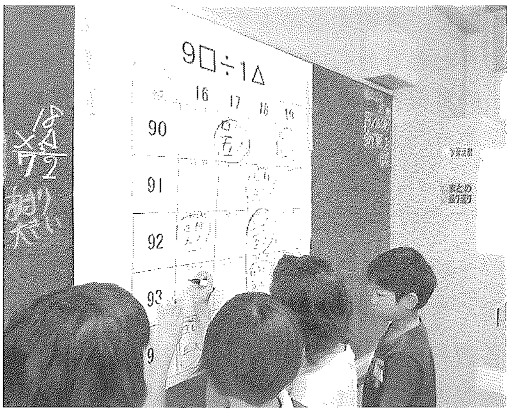
［**主問題１**］（＝**原問題**）を学ぶことで、学習内容の基礎を習得することができる。その上で［**主問題２**］（＝**条件変更した問題**）に取り組むので、児童は到達するべき学習内容をどの方法を使って到達するのか見通しをもつことができていた。［**主問題２**］では、「どんな数でも成り立つのだろうか。」と疑問をもち、［**主問題１**］の解決方法を手がかりとしていた。

ただ単に練習問題をするということでなく、「およその数（四捨五入）にすると仮商から、早く見付けることができる」という**一般化**につなげることができた。

(6)　単元配列の工夫と２次元表

「大きな数」の単元は、この単元の後に学習する。そのため「概数（およその数）」が未習であった。児童は１８を２０と見ることに壁があった。

ある児童から、「２０に近い数にするとよい」というアイデアが出て、およその数、四捨五入を導入できた。



本時のような授業を組むのであれば、今後、単元配列も工夫する必要がある。

授業では写真のように、２次元表が埋まっていき、最後には、すべての欄で「四捨五入が早い」と結論付けられた。

４．まとめ

提案授業①、②を通して、当研究会の今年度の実践を、以下のようにまとめることができる。

導入問題（原問題）
授業の最初は、教師が問題を出す。
⇩
導入問題（原問題）の解決
教師の支援を受け、「原問題」を解決する。
⇩
命　題　化
「原問題」の解決をまとめ「命題化」する。
⇩
条件変更
命題の仮定（条件）を変更し、新たな課題の設定を促す。
⇩
ここで、**学習課題**を設定する。
⇩
自力解決する。
⇩
練り上げる。対話的な学びをする。
⇩
統合化・体系化・一般化を図る。

という授業の流れである。

「原問題」と**「条件変更した新たな課題」**で主体的な学びとすることができ、

「自力解決後の練り上げ」で対話的な学びとすることができる。

当研究会の「授業モデル」として提案したい。

（代表：小畑　裕）